Тема: Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

Цели:

- изучить понятие дифференциального уравнения
- рассмотреть дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными
- научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Оснащение занятия: конспект лекций.

Порядок выполнения работы

- Записать в тетрадь разобранные примеры на решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$ называется ***уравнением с разделяющими*** ***переменными,*** если функцию $f(x,y)$ можно представить в виде произведения двух функций, зависящ от x и y:

$$f(x,y) = p(x)h(y),$$

где $p(x)$ и $h(y)$ − непрерывные функции.

Рассматривая производную y' как отношение дифференциалов $\frac{dy}{dx}$, перенесем dx в правую часть и разделим уравнение на $h(y)$:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)h(y), \Rightarrow \quad \frac{dy}{h(y)} = p(x)dx.$$

Разумеется, нужно убедиться, что $h(y) \neq 0$. Если найдется число x_0, при котором $h(x_0) = 0$, то это число будет также являться решением дифференциального уравнения. Деление на $h(y)$ приводит к потере указанного решения.

Обозначив $q(y) = \frac{1}{h(y)}$, запишем уравнение в форме:

$$q(y)dy = p(x)dx.$$

Теперь переменные разделены и мы можем проинтегрировать дифференциальное уравнение:

$$\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx + C,$$

где C − постоянная интегрирования.
Вычисляя интегралы, получаем выражение

$$Q(y) = P(x) + C,$$

описывающее общее решение уравнения с разделяющимися переменными.

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = y(y+2)$.

Решение.

В данном случае $p(x) = 1$ и $h(y) = y(y+2)$. Разделим уравнение на $h(y)$ и перенесем dx в правую часть:

$$\frac{dy}{y(y+2)} = dx.$$

Заметим, что при делении мы могли потерять решения $y = 0$ и $y = -2$ в случае когда $h(y)$ равно нулю. Действительно, убедимся, что $y = 0$ является решением данного дифференциального уравнения. Пусть

$$y = 0, \quad dy = 0.$$

Подставляя это в уравнение, получаем: $0 = 0$. Следовательно, $y = 0$ будет являться одним из решений. Аналогично можно проверить, что $y = -2$ также является решением уравнения.
Вернемся обратно к дифференциальному уравнению и проинтегрируем его:

$$\int \frac{dy}{y(y+2)} = \int dx + C.$$

Интеграл в левой части можно вычислить методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{y(y+2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+2},$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y(y+2)} = \frac{A(y+2)+By}{y(y+2)},$$

$$\Rightarrow 1 \equiv Ay + 2A + By,$$

$$\Rightarrow 1 \equiv (A+B)y + 2A,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A=1 \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Таким образом, мы получаем следующее разложение рациональной дроби в подынтегральном выражении:

$$\frac{1}{y(y+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right)dy = \int dx + C$$

$$\frac{1}{2}\left(\int\frac{dy}{y} - \int\frac{dy}{y+2}\right) = \int dx + C$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln|y| - \ln|y+2|\right) = x + C$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = x + C$$

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = 2x + 2C.$$

Переименуем константу: $2C = C_1$. В итоге, окончательное решение уравнения записывается в виде:

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = 2x + C_1, \quad y = 0, \quad y = -2.$$

Общее решение здесь выражено в неявном виде. В данном примере мы можем преобразовать его и получить ответ в явной форме в виде функции $y = f(x, C_1)$, где C_1 − некоторая константа. Однако это можно сделать не для всех дифференциальных уравнений.

Пример 2

Решить дифференциальное уравнение $\left(x^2+4\right)y' = 2xy$.

Решение

Запишем данное уравнение в следующем виде:

$$\left(x^2+4\right)dy = 2xydx.$$

Разделим обе части на $(x^2 + 4)y$:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{x^2+4}.$$

Очевидно, что $x^2 + 4 \neq 0$ для всех действительных x. Проверим, что $y = 0$ является

одним из решений уравнения. После подстановки $y = 0$ и $dy = 0$ в исходное дифференциальное урав
видно, что функцию$y = 0$ действительно является

решением уравнения.
Теперь можно проинтегрировать полученное уравнение:

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{2xdx}{x^2+4} + C, \quad \Rightarrow \ln|y| = \int\frac{d\left(x^2\right)}{x^2+4} + C.$$

Заметим, что $dx^2 = d(x^2 + 4)$. Следовательно,

$$\ln|y| = \int\frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4} + C, \quad \Rightarrow \ln|y| = \ln\left(x^2+4\right) + C.$$

Представим константу C как lnC_1, где C_1 0. Тогда

$$\ln|y| = \ln\left(x^2+4\right) + \ln C_1,$$

$$\ln|y| = \ln\left(C_1\left(x^2+4\right)\right),$$

$$|y| = C_1\left(x^2+4\right),$$

$$y = \pm C_1\left(x^2+4\right).$$

Таким образом, заданное дифференциальное уравнение имеет следующие решения:

$$y = \pm C_1\left(x^2+4\right), \quad y = 0, \quad \text{где} \quad C_1 > 0.$$

Полученный ответ можно упростить. В самом деле, введем произвольную

константу C, принимающую значения от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда решение можно

записать в виде:

$$y = C\left(x^2 + 4\right).$$

При $C = 0$, оно становится равным $y = 0$.

Пример 3

Найти все решения дифференциального уравнения $y' = -xe^y$.

Решение.

Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = -xe^y,$$

$$\frac{dy}{e^y} = -xdx,$$

$$e^{-y}dy = -xdx.$$

Очевидно, что деление на e^y не приводит к потере решения, поскольку e^y 0.

После интегрирования получаем

$$\int e^{-y}dy = \int (-x)\,dx + C,$$

$$-e^{-y} = -\frac{x^2}{2} + C \quad \text{или} \quad e^{-y} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Данный ответ можно выразить в явном виде:

$$-y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right) \quad \text{или} \quad y = -\ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

В последнем выражении предполагается, что константа C 0, чтобы удовлетворить области определения логарифмической функции.

Пример 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $x(y+2)y' = \ln x + 1$ при условии $y(1) = -1$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на x:

$$x(y+2)\frac{dy}{dx} = \ln x + 1,$$

$$(y+2)dy = \frac{(\ln x + 1)dx}{x}.$$

Мы предполагаем, что $x \neq 0$, поскольку областью определения исходного

уравнения является множествоx 0.
В результате интегрирования получаем:

$$\int (y+2)\,dy = \int \frac{(\ln x + 1)\,dx}{x} + C.$$

Интеграл в правой части вычисляется следующим образом:

$$\int \frac{(\ln x + 1)\,dx}{x} = \int (\ln x + 1)\,d(\ln x) = \int (\ln x + 1)\,d(\ln x + 1) = \frac{(\ln x + 1)^2}{2}.$$

Следовательно, общее решение в неявной форме имеет вид:

$$y^2 + 2y = \frac{(\ln x + 1)^2}{2} + C,$$
$$2y^2 + 4y = (\ln x + 1)^2 + C_1,$$

где $C_1 = 2C$ − постоянная интегрирования.
Найдем теперь значение C_1, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = -1$:

$$2(-1)^2 + 4(-1) = (\ln 1 + 1)^2 + C_1,$$
$$\Rightarrow\ C_1 = -3.$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения с заданным начальным условием (задача Коши) описывается алгебраическим уравнением:

$$2y^2 + 4y = (\ln x + 1)^2 - 3.$$

Пример 5

Решить дифференциальное уравнение $y' \cot^2 x + \tan^2 y = 0$.

Решение.

Запишем данное уравнение в следующем виде:

$$\frac{dy}{dx}\cot^2 x = -\tan y,$$
$$\Rightarrow\ \cot^2 x\,dy = -\tan y\,dx.$$

Разделим обе части на $\tan y \cot^2 x$:

$$\frac{\cancel{\cot^2 x}\,dy}{\tan y\,\cancel{\cot^2 x}} = -\frac{\cancel{\tan y}\,dx}{\cancel{\tan y}\,\cot^2 x},$$
$$\Rightarrow\ \frac{dy}{\tan y} = -\frac{dx}{\cot^2 x}.$$

Проверим, не потеряли ли мы какие-либо решения в результате деления.

Необходимо исследовать следующие два корня:

$$\tan y \cot^2 x = 0.$$

$$1)\ \tan y = 0; \quad \Rightarrow\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \quad dy = 0.$$

Подставляя в исходное уравнение, мы видим, что $y = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ является решением уравнения.
Второе возможное решение описывается формулой

$$2)\ \cot^2 x = 0.$$

Здесь мы получаем ответ:

$$x = \pi n,\ n \in Z, \quad dx = 0,$$

который не удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению.
Теперь можно проинтегрировать дифференциальное уравнение и найти его общее решение:

$$\int \frac{dy}{\tan y} = -\int \frac{dx}{\cot^2 x} + C,$$

$$\int \frac{dy}{\frac{\sin y}{\cos y}} = -\int \frac{dx}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} + C,$$

$$\int \frac{\cos y dy}{\sin y} = -\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x} + C,$$

$$\int \frac{d(\sin y)}{\sin y} = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx + C,$$

$$\ln|\sin y| = -\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx + C,$$

$$\ln|\sin y| = -(\tan x - x) + C, \quad \text{или}$$

$$\ln|\sin y| = -\tan x + x + C.$$

Окончательный ответ записывается в виде:

$$\ln|\sin y| + \tan x - x = C, \quad y = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$

Пример 6

Найти частное решение уравнения $(1 + e^x) y' = e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.

Решение.

Перепишем уравнение в следующем виде:

$$\left(1+e^x\right)dy = e^x dx.$$

Разделим обе части на $1 + e^x$:

$$dy = \frac{e^x}{1+e^x}dx.$$

Поскольку $1 + e^x$ 0, то при делении мы не потеряли никаких решений.

Интегрируем полученное уравнение:

$$\int dy = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx + C,$$

$$y = \int \frac{d\left(e^x\right)}{e^x+1} + C,$$

$$y = \int \frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1} + C,$$

$$y = \ln\left(e^x+1\right) + C.$$

Теперь найдем константу C из начального условия $y(0) = 0$.

$$0 = \ln\left(e^0+1\right) + C,$$

$$0 = \ln 2 + C,$$

$$C = -\ln 2.$$

Следовательно, окончательный ответ имеет вид: $y = \ln(e^x + 1) - \ln 2 = \ln \frac{e^x+1}{2}$

Задание 2.

Решить дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными:

1. $(y-1)^2dx + (1 - x)^3dy = 0$
2. $xdx - y(4 + x^2)\, dy = 0$
3. $\cos x \cos y\, dx - \sin x \sin y\, dy = 0$
4. $\ln x \sin^3 y\, dx + x \cos y\, dy = 0$
5. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$3xdx + (1 - x^2)\, dy = 0 y(0) = 0$